無限階擬微分作用素の形式核関数 (無限階擬微分作用素の超局所解析と漸近解析)

神本, 晋吾; 片岡, 清臣

数理解析研究所講究録
第 1835 巻 2013 年 1-9

無限階擬微分作用素の形式核関数

京都大学数理解析研究所　神本晋吾 (Shingo Kamimoto)
Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University
東京大学大学院数理科学研究科　片岡清臣 (Kiyoomi Kataoka)
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

1 Introduction

本稿の目的は [K],[K-K] で得られた無限階擬微分作用素の形式核関数に関する結果の紹介である. 無限階擬微分作用素の層 $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ は次で定義される ([S-K-K]);

$$\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}} := \mu_X(\mathscr{O}_{X\times X})[n] \underset{p_2^{-1}\mathscr{O}_X}{\otimes} p_2^{-1}\Omega_X^n.$$

ここで, X は n 次元複素多様体, $\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_{X\times X}, \Omega_X^n$ をそれぞれ X, $X\times X$ 上の正則関数の層, X 上の正則 n 形式の層とし, μ_X を対角埋め込み $X \to X\times X$ に付随する超局所化関手 ([K-S]), $p_2 : T_X^*(X\times X) \to X$ を第二成分の射影とする. $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ の環構造 $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathscr{E}_X^{\mathbb{R}} \to \mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ は, Dolbeault complex の integration morphism の導来関手を用いて, 次で与えられる ([S-K-K]);

$$(\psi_1 d\tilde{z}, \psi_2 d\tilde{z}) \to \psi_3(z, \tilde{z}-z)d\tilde{z} = \left(\int \psi_1(z, \hat{z}-z)\psi_2(\hat{z}, \tilde{z}-\hat{z})d\hat{z}\right) d\tilde{z}.$$

本稿の主な目的は, この環構造の明示的な表示を与えることである. しかしながら, 第二節で議論されているように, 我々は核関数の空間は無限階微分作素の核関数の積 (作用素積と呼ぶ) の類推から, 自然に導かれる積の下で閉じていないことを発見した. 同様の問題は無限階擬微分作用素の表象の積を考える際にも現れる. 実際, 無限階擬微分作用素の表象の積は Leibnitz rule (5.3) から導かれるべきである. 良く知られているように, 表象の空間はこの積の下で閉じていない. この問題を解決するため, L. Boutet de Monvel は表象の空間の拡張であり, Leibniz rule と類似の積の下で閉じている形式表象の空間を導入した ([B]).

すると, 表象の場合と同様に, 核関数の空間に対しても, これの拡張であり, 作用素積の類推から得られる積の下で閉じている空間を与えることはできないか? というのが我々の問題意識である.

2 核関数の作用素積に関する考察

最初に, 核関数の作用素積の問題点を明確にするため, これに関する考察を行う. 本稿では $X=\mathbb{C}^n$ の場合を考える. このとき $(z,\tilde{z})=(x+iy,\tilde{x}+i\tilde{y})\in X\times X$ と座標を取ると, $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ の $p=(0;idx_1)\in T^*X\simeq T_X^*(X\times X)$ での茎は次で表される;

$$\mathscr{E}_{X,p}^{\mathbb{R}}=\varinjlim_{\varepsilon\to 0}H_{Z_\varepsilon}^n(U_\varepsilon;\mathscr{O}_{X\times X})\otimes d\tilde{z}.$$

ただし $U_\varepsilon=\{(z,\tilde{z})\in\mathbb{C}^{n+n};\,|z|<\varepsilon,|\tilde{z}_j-z_j|<\varepsilon\ \mathrm{for}\,j=1,\cdots,n\}$, $Z_\varepsilon=\{(z,\tilde{z})\in U_\varepsilon\,;\,\tilde{y}_1-y_1\geq\varepsilon|\tilde{x}_1-x_1|,|\tilde{z}_1-z_1|\geq\varepsilon|\tilde{z}_j-z_j|\ \mathrm{for}\,j=2,\cdots,n\}$ とする. よって, $U_\varepsilon\setminus Z_\varepsilon$ の Stein 被覆 $\{U_\varepsilon^1,\cdots,U_\varepsilon^n\}$ を

$$\begin{aligned}U_\varepsilon^1&:=U_\varepsilon\cap\{\tilde{y}_1-y_1<\varepsilon|\tilde{x}_1-x_1|\},\\U_\varepsilon^j&:=U_\varepsilon\cap\{|\tilde{z}_1-z_1|<\varepsilon|\tilde{z}_j-z_j|\}\ (j=2,\cdots,n),\end{aligned}$$

と取ると, $\mathscr{E}_{X,p}^{\mathbb{R}}$ の次の表示を得る;

$$\mathscr{E}_{X,p}^{\mathbb{R}}=\varinjlim_{\varepsilon\to 0}\Big(\mathscr{O}_{X\times X}(\bigcap_{j=1}^n U_\varepsilon^j)/\sum_{k=1}^n\mathscr{O}_{X\times X}(\bigcap_{j\neq k}U_\varepsilon^j)\Big)\otimes d\tilde{z}. \tag{2.1}$$

我々は

$$\mathscr{K}_\varepsilon=\mathscr{O}_{X\times X}(\bigcap_{j=1}^n U_\varepsilon^j) \tag{2.2}$$

$$\mathscr{N}_\varepsilon=\sum_{k=1}^n\mathscr{O}_{X\times X}(\bigcap_{j\neq k}U_\varepsilon^j) \tag{2.3}$$

をそれぞれ $\mathscr{E}_{X,p}^{\mathbb{R}}$ の核関数, 零核関数と呼ぶ. また, $\mathscr{K}_p,\mathscr{N}_p$ を次で定義する;

$$\mathscr{K}_p:=\varinjlim_{\varepsilon\to 0}\mathscr{K}_\varepsilon,\quad \mathscr{N}_p:=\varinjlim_{\varepsilon\to 0}\mathscr{N}_\varepsilon.$$

無限階微分作用素の核関数の作用素積の類推から, $\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{X,p}$ の核関数 ψ_1, ψ_2 に対し作用素積を次で定義することは自然であろう;

$$(2.4) \qquad (\psi_1, \psi_2) \to \psi_1 * \psi_2(z, \tilde{z} - z) = \left(\int_\Gamma \psi_1(z, \widehat{z} - z)\psi_2(\widehat{z}, \tilde{z} - \widehat{z}) d\widehat{z} \right).$$

ここで, 積分路 Γ は具体的に次で与える;

(2.5)
$$\left\{ \left(w_1(t_1), \frac{|w_1(t_1)| + \varepsilon''}{\varepsilon} e^{it_2}, \cdots, \frac{|w_1(t_1)| + \varepsilon''}{\varepsilon} e^{it_n} \right); (t_1, \cdots, t_n) \in [0, 2\pi]^n \right\}.$$

ただし, 正定数 $r, r', \varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ は $0 < r' < r, 0 < \varepsilon' < \varepsilon, 0 < \varepsilon'' \ll \varepsilon' r'$ を満たすとし, $w_1(t_1)$ は

$$(2.6) \qquad w_1(t_1) = \frac{(t_1 - \pi)}{\pi} r' + i \left(\varepsilon' r' \frac{|t_1 - \pi|}{\pi} - \varepsilon'' \left(1 - \frac{|t_1 - \pi|}{\pi} \right) \right)$$

とする.

しかし, 残念ながら $\mathscr{K}_p$ は (2.4) の下で閉じていない. 簡単のため, $X = \mathbb{C}^2$ とする. このとき次の形の 0 階の定数係数の microdifferential operator $P(\partial)$ を考えてみる;

$$P(\partial) := \sum_{j \geq 1} C_j \partial_1^{-j} \partial_2^j.$$

ただし, $C_j \in \mathbb{C}$ はある定数 $C > 0$ に対し次の評価を満たすとする;

$$|C_j| \leq C^j \quad (\forall j = 1, 2, \cdots).$$

$P(\partial)$ の核関数は次で与えられる;

$$\psi(*, \tilde{z} - z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{j \geq 1} \frac{(-1)^j j C_j \ (\tilde{z}_1 - z_1)^{j-1} \log(\tilde{z}_1 - z_1)}{(\tilde{z}_2 - z_2)^{j+1}}.$$

この様な microdifferential operator として, 具体的に次の P_1, P_2 を考えてみる;

例 2.1.

$$P_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j(j+1)} \partial_1^{-j} \partial_2^j, \quad P_2 = \partial_1^{-1} \partial_2.$$

P_1, P_2 の核関数 ψ_1, ψ_2 は (2.4) で与えられる積の下で閉じていない. これは積分路 Γ の第一変数の積分端点 $w_1(0), w_1(2\pi)$ が固定されているため, $\psi_1 * \psi_2$ の正則域が広がらないためである. 詳しくは [K-K] を参照.

上の例が示すように, 一般に核関数 ψ_1, ψ_2 の作用素積 $\psi_1 * \psi_2$ は $\mathscr{K}_p$ に属するとは限らないが, 次のように核関数として意味のある部分を抽出することが可能である;

定理 2.2. $\psi_1 * \psi_2$ は次のような分解を持つ;

$$\psi_1 * \psi_2 = \phi_1 + \phi_2. \tag{2.7}$$

ただし,$\phi_1 \in \mathscr{K}_p$ であり, ϕ_2 はある正定数 ε, C が存在し

$$\{(z,\tilde{z}) \in \mathbb{C}^{n+n}; |z| < \varepsilon, |\tilde{z}_1 - z_1| < \varepsilon, C < |\tilde{z}_j - z_j| \quad (j = 2, \cdots, n)\}$$

上で正則である.

上の ϕ_2 は $\mathscr{K}_p$ に属していないものの, $\tilde{z}_1 = z_1$ の近傍まで正則であるという点で, 本来ならば零核関数と捉えられるべきものである. その意味で ϕ_1 は $\psi_1 * \psi_2$ の "作用素として" 本質的な部分を捉えている.

3 形式核関数の定義

第二節で触れたように, (2.4) で定義される積の問題点は積分端点を固定したことから生じている. この問題点を解決するため,我々はこの積分端点に対応する新たなパラメータ τ を導入し,このパラメータを内包する形で核関数の空間を拡張する.

準備のため,正定数 r_0, ε, δ に対し次の集合を定義する:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\varepsilon,\delta} &:= \{\tau \in \mathbb{C}; |\tau| < \varepsilon, |\operatorname{Im}\tau| + \delta < \varepsilon \operatorname{Re}\tau\}, \\
\widehat{\Gamma}_{\varepsilon,\delta} &:= \{\tilde{z}_1 - z_1 \in \mathbb{C}; |\tilde{z}_1 - z_1| < \varepsilon, \operatorname{Im}(\tilde{z}_1 - z_1) + \delta < \varepsilon |\operatorname{Re}(\tilde{z}_1 - z_1)|\}, \\
V_\varepsilon^0 &:= \{(\tau, z, \tilde{z}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n; \tau \in \Gamma_{\varepsilon,0}, |z| < \varepsilon, |\tilde{z} - z| < \varepsilon\}, \\
V_\varepsilon^1 &:= V_\varepsilon^0 \cap \{\tilde{z}_1 - z_1 \in \widehat{\Gamma}_{\varepsilon,0}\}, \\
V_\varepsilon^j &:= V_\varepsilon^0 \cap \Big\{\max\{|\tau|, |\tilde{z}_1 - z_1|\} < \varepsilon |\tilde{z}_j - z_j|\Big\} \ (j = 2, ..., n),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V_\varepsilon &:= \bigcap_{j=1}^{n} V_\varepsilon^j, \\
U_{r_0,\varepsilon}^1 &:= V_\varepsilon^0 \cap \{|\tilde{z}_1 - z_1| < r_0|\tau|\}, \\
\widehat{V}_{r_0,\varepsilon}^1 &:= (V_\varepsilon^1 \cup U_{r_0,\varepsilon}^1) \cap \bigcap_{j=2}^{n} V_\varepsilon^j, \\
\widehat{V}_{r_0,\varepsilon}^j &:= \bigcap_{j \neq k} V_\varepsilon^k \ (j = 2, ..., n), \\
U_{r_0,\varepsilon}^{\tau_1,\tau_2} &:= \Big\{ (z, \tilde{z}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n; |\tilde{z}_1 - z_1| < r_0 \min\{|\tau_1|, |\tau_2|\}, \\
&\qquad \max\{|\tau_1|, |\tau_2|, |\tilde{z}_1 - z_1|\} < \varepsilon|\tilde{z}_j - z_j|, \ (j = 2, ..., n) \Big\}.
\end{aligned}
$$

このとき,形式核関数の空間を次で定義する;

定義 3.1. $\psi(\tau, z, \tilde{z} - z) \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^{2n+1}}(V_\varepsilon)$ が任意の $\tau_1, \tau_2 \in \Gamma_{\varepsilon,0}$ に対し $\psi(\tau_1, z, \tilde{z} - z) - \psi(\tau_2, z, \tilde{z} - z)$ が $U_{r_0,\varepsilon}^{\tau_1,\tau_2}$ まで解析接続されるとき $\psi(\tau, z, \tilde{z} - z)$ を r_0, ε をパラメータとして持つ形式核関数と呼ぶ. r_0, ε をパラメータとして持つ形式核関数の成す空間を $\widehat{\mathscr{K}_{r_0,\varepsilon}}$ により表す. また,$\widehat{\mathscr{K}_{r_0,\varepsilon}}$ の零形式核関数を次で定義する;

$$
\widehat{\mathscr{N}_{r_0,\varepsilon}} := \widehat{\mathscr{K}_{r_0,\varepsilon}} \cap \sum_{j=1}^{n} \mathscr{O}_{\mathbb{C}^{2n+1}}(\widehat{V}_{r_0,\varepsilon}^j).
$$

また,$\widehat{\mathscr{K}_p}, \widehat{\mathscr{N}_p}$を次で定義する;

$$
\widehat{\mathscr{K}_p} := \varinjlim_{r_0,\varepsilon \to 0} \mathscr{K}_{r_0,\varepsilon}, \quad \widehat{\mathscr{N}_p} := \varinjlim_{r_0,\varepsilon \to 0} \mathscr{N}_{r_0,\varepsilon}.
$$

定義より直ちに次の埋め込み ι を得る;

$$
\iota : \mathscr{K}_\varepsilon \hookrightarrow \widehat{\mathscr{K}_{r_0,\varepsilon}}, \ \psi(z, \tilde{z} - z) \mapsto \iota(\psi)(\tau, z, \tilde{z} - z) := \psi(z, \tilde{z} - z).
$$

同様に ι は零核関数の埋め込み $\iota : \mathscr{N}_\varepsilon \hookrightarrow \widehat{\mathscr{N}_{r_0,\varepsilon}}$ を与える. これにより形式核関数は核関数の拡張概念であることがわかるが, では,形式核関数により表される作用素,つまり

$$
\widehat{\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{C}^n,p}} := \varinjlim_{r_0,\varepsilon \to 0} \left(\widehat{\mathscr{K}_{r_0,\varepsilon}} / \widehat{\mathscr{N}_{r_0,\varepsilon}} \right) \otimes d\tilde{z}
$$

の実態はどのようなものであろうか?我々はこれに対する答えとして次を得た;

定理 3.2. ιは次の同型$\bar{\iota}$を誘導する；

$$\bar{\iota}: \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{C}^n,p} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathscr{E}}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{C}^n,p}.$$

定理 3.2 の証明は$\bar{\iota}$の逆ϱを具体的に構成することにより与えられるが,詳細に関しては [K-K] を参照.

4 形式核関数の作用素積

さて,本題の環構造に関してであるが,形式核関数の作用素積を次で定義する;

定義 4.1. $\psi_1, \psi_2 \in \widehat{\mathscr{K}_{r_0,\varepsilon}}$に対し，作用素積$\psi_1 * \psi_2$を次で定義する:

$$\psi_1 * \psi_2(\tau, z, \tilde{w}) := \int_{\Gamma(\tau)} \psi_1(\tau, z, \tilde{w})\psi_2(\tau, z+\tilde{w}, w-\tilde{w})d\tilde{w}. \tag{4.1}$$

ここで,積分路$\Gamma(\tau)$は次のように取る；

$$\left\{\left(\tau w_1(t_1), \frac{2\max\{|w_1(t_1)|, |\tau|\}}{\varepsilon}e^{it_2}, \dots, \frac{2\max\{|w_1(t_1)|, |\tau|\}}{\varepsilon}e^{it_n}\right); (t_1, \dots, t_n) \in [0, 2\pi]^n\right\} \tag{4.2}$$

ただし

$$w_1(t_1) = \frac{(t_1 - \pi)}{\pi}r'_0 + i\left(\varepsilon' r'_0\frac{|t_1 - \pi|}{\pi} - \varepsilon''\left(1 - \frac{|t_1 - \pi|}{\pi}\right)\right) \tag{4.3}$$

とし，正定数$r'_0, \varepsilon', \varepsilon''$は$0 < r'_0 < \varepsilon, 2r'_0 \le r_0 < 1, 0 < \varepsilon' < \varepsilon, 0 < \varepsilon'' \ll \varepsilon' r'_0$を満たすとする.

これにより$\widehat{\mathscr{K}_p}$に積$*$が定まるが，これに関し次が成立する;

定理 4.2. $\psi_1, \psi_2 \in \widehat{\mathscr{K}_p}$に対し$\psi_1 * \psi_2 \in \widehat{\mathscr{K}_p}$となる．更に$\psi_1$または$\psi_2$の一方が$\widehat{\mathscr{N}_p}$に含まれるとき$\psi_1 * \psi_2 \in \widehat{\mathscr{N}_p}$が成立する.

また積分路$\Gamma(\tau)$のパラメータ$r'_0, \varepsilon', \varepsilon''$の取り方による$\psi_1 * \psi_2$の差は$\widehat{\mathscr{N}_p}$に含まれるため, $*$は次の環構造を定める;

$$\cdot * \cdot : \widehat{\mathscr{E}}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{C}^n,p} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \widehat{\mathscr{E}}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{C}^n,p} \to \widehat{\mathscr{E}}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{C}^n,p}.$$

以上から形式核関数は我々の目標としていた核関数の拡張を与えていると言えるであろう.

5 形式核関数からの表象の構成

最後に無限階擬微分作用素の表象と形式核関数との関係について述べる. 無限階擬微分作用素の表象や通常の核関数との関係に関する詳細は, [A1], [A2], [AKY1], [AKY2] を参照. 無限階擬微分作用素の表象は次で与えられる;

定義 5.1. $P(z,\zeta)$ が次の条件を満たすとき $P(z,\zeta)$ を $\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{C}^n,p}$ の表象と呼び, その空間を $\mathcal{S}_p$ で表す; p のある錐状開近傍 $\Omega \subset \dot{T}^*\mathbb{C}^n$ と正定数 d が存在し, $P(z,\zeta)$ は $\Omega[d] := \{(z,\zeta) \in \Omega; \|\zeta\| \geq d\}$ 上正則で次の評価を満たす; 任意の $h > 0$ に対し $B_h > 0$ が存在し

$$|P(z,\zeta)| \leq B_h e^{h|\zeta|},\ (z,\zeta) \in \Omega[d]. \tag{5.1}$$

さらに $P(z,\zeta)$ が $\Omega[d]$ 上 $|\zeta| \to \infty$ のとき指数減少するとき, $P(z,\zeta)$ を $\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{C}^n,p}$ の零表象と呼び, その空間を $\mathcal{N}_p$ で表す.

通常の核関数の場合と同様に, 形式核関数 $\psi \in \widehat{\mathscr{K}_{r_0,\varepsilon}}$ に対し, その表象を

$$\sigma(\psi)(z,\zeta) := \int_{\Gamma(\delta_0)} \psi(\delta_0, z, w) e^{\langle w,\zeta\rangle} dw \tag{5.2}$$

により定義する. ただし δ_0 は十分小さな正定数とする. このとき次が成立する;

定理 5.2. $\psi \in \widehat{\mathscr{K}_p}$ ならば $\sigma(\psi) \in \mathcal{S}_p$. さらに $\psi \in \widehat{\mathscr{N}_p}$ ならば, $\sigma(\psi) \in \mathcal{N}_p$.

ここで, 積分路 $\Gamma(\delta_0)$ の取り方による $\sigma(\psi)$ の差は $\mathcal{N}_p$ に含まれることに注意すると, $\bar{\sigma}$ により次の射が定まる;

$$\bar{\sigma} : \widehat{\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{C}^n,p}} \longrightarrow \mathcal{S}_p/\mathcal{N}_p.$$

この $\bar{\sigma}$ に関し次が成立する;

定理 5.3. $\bar{\sigma}$ は同型.

ここで, $P_1, P_2 \in \mathcal{S}_p$ に対し, Leibnitz rule より定まる次の積 $\circ$ を考える;

$$P_1 \circ P_2(z,\zeta) := \sum_{\beta \geq 0} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^\beta}{\partial \zeta^\beta} P_1(z,\zeta) \cdot \frac{\partial^\beta}{\partial z^\beta} P_2(z,\zeta). \tag{5.3}$$

第一節でも触れたように, 一般に $P_1 \circ P_2$ は収束せず, $\mathcal{S}_p$ の元を定めるとは限らない. しかしながら, 形式核関数 $\psi_1, \psi_2 \in \widehat{\mathscr{K}_{r_0,\varepsilon}}$ から構成した表象 $\sigma(\psi_1), \sigma(\psi_2)$ に対しては, 表象を定める際の積分路 $\Gamma(\delta_0)$ のパラメータを上手く取ることにより, $\sigma(\psi_1) \circ \sigma(\psi_2)$ は収束し $\mathcal{S}_p$ の元を定めることが示される. これは積分路の取り替えにより, 一般には収束しない積 (5.3) の収束する本質的な部分を取り出すことが可能であることを意味し, 特筆すべき点である.

すると, 形式核関数の作用素積 $*$ と表象での積 $\circ$ との両立性が問題となるが, これに関しても積分路を上手く取ることにより, 次を示すことができる;

定理 5.4. $*$ と $\circ$ は $\bar{\sigma}$ の下で両立する:

(5.4) $$\bar{\sigma}(\psi_1 * \psi_2) = \bar{\sigma}(\psi_1) \circ \bar{\sigma}(\psi_2).$$

参考文献

[A1] Aoki, T., *Symbols and formal symbols of pseudodifferential operators*, Advanced Syudies in Pure Math. **4** (K.Okamoto, ed.), Group Representation and Systems of Differential Equations, Proceedings Tokyo 1982, Kinokuniya, Tokyo; North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1984, pp.181-208 .

[A2] ——, 無限階擬微分作用素の表象理論. 東京大学数理科学セミナリーノート, **14** (1997).

[AKY1] Aoki,T., K. Kataoka and S. Yamazaki, *Construction of kernel functions of pseudodifferential operators of infinite order", Actual problems in Mathematical Analysis*, Proceedings of the conference dedicated to the seventieth birthday of Professor Yu. F. Korobeinik, Rostov on Don, 2000, GinGo Publisher, pp. 28–40.

[AKY2] ——, 超関数・*FBI* 変換・無限階擬微分作用素, 共立出版株式会社, 2004.

[B] Boutet de Monvel, L., *Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et opérateurs d'ordre infini*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **22** (1972), pp.229-268.

[K] Kamimoto, S., 無限階擬微分作用素の形式核関数と指数解析について, 東京大学大学院数理科学研究科修士論文, 2009.

[K-K] Kamimoto, S. and K. Kataoka, *On the composition of kernel functions of pseudo-differential operators* $\mathscr{E}^{\mathbb{R}}$ *and the compatibility with Leibniz rule*, to appear in RIMS *Kôkyûroku* Bessatsu.

[K-S] Kashiwara, M. and P. Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren Math. Wiss. **292**, Springer, 1990.

[S-K-K] Sato, M., T. Kawai and M. Kashiwara, *Microfunctions and Pseudodifferential Equations, Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations* (H.Komatsu, ed.), Proceeding, Katata 1971, Lecture Notes in Math. **287**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1973, pp.265-529.